

BỘ QUAN SÁT TRẠNG THÁI BỀN VỮNG H_2 CHO HỆ THỐNG PHI TUYẾN VỚI THÔNG SỐ THAY ĐỔI: ÁP DỤNG CHO MÔ HÌNH ROBOT KHỚP LINH HOẠT MỘT LIÊN KẾT

ROBUST H_2 OBSERVER DESIGN FOR NONLINEAR PARAMETER VARYING SYSTEMS: POLYTOPIC-BASED APPROACH

Võ Khánh Thoại¹, Phạm Thanh Phong^{1*}, Lê Tiến Dũng²

¹Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật - Đại học Đà Nẵng, Việt Nam

²Trường Đại học Bách khoa - Đại học Đà Nẵng, Việt Nam

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: ptphong@ute.udn.vn

(Nhận bài / Received: 19/02/2025; Sửa bài / Revised: 16/5/2025; Chấp nhận đăng / Accepted: 20/5/2025)

DOI: 10.31130/ud-jst.2025.069

Tóm tắt - Bài báo trình bày kết quả thiết kế bộ quan sát trạng thái bền vững H_2 cho một lớp đối tượng phi tuyến thỏa mãn được điều kiện Lipschitz, có thông số thay đổi theo thời gian, thông qua phương pháp đa diện. Phương pháp đề xuất nhằm tối thiểu hóa tác động của nhiễu lên sai số ước lượng, đồng thời so sánh hiệu suất với bộ quan sát H_∞ . Với phân tích ổn định dựa trên hàm Lyapunov toàn phương, bài toán thiết kế được biểu diễn dưới dạng một hệ bất phương trình ma trận tuyến tính (Linear Matrix Inequality - LMI), đảm bảo sự ổn định bền vững và tốc độ hội tụ nhanh. Kết quả mô phỏng trên mô hình robot khớp linh hoạt một liên kết cho thấy bộ quan sát theo tiêu chuẩn H_2 đạt độ chính xác cao và khả năng chống nhiễu tốt, từ đó có thể đánh giá được hiệu quả của phương pháp đề xuất.

Từ khóa - Bộ quan sát trạng thái bền vững H_2 ; Bất phương trình ma trận tuyến tính; lớp đối tượng phi tuyến với thông số thay đổi; phương pháp đa diện; Robot khớp linh hoạt

1. Phần mở đầu

Thiết kế bộ quan sát trạng thái là một hướng nghiên cứu cốt lõi trong lý thuyết điều khiển, bắt nguồn từ nhu cầu ước lượng trạng thái của các hệ thống động lực học nhằm phục vụ cho điều khiển phản hồi và chẩn đoán lỗi. Những công trình nền tảng như bộ lọc Kalman [1], [2] và bộ quan sát Luenberger [3] đã đóng vai trò quan trọng trong việc hình thành và phát triển lĩnh vực này, tạo tiền đề cho nhiều hướng nghiên cứu hiện đại. Trong thời gian gần đây, nhiều nghiên cứu đã tập trung vào việc mở rộng các cấu trúc bộ quan sát cổ điển để áp dụng cho các hệ thống có cấu trúc phức tạp (hướng nghiên cứu thứ nhất) như hệ thống bị tác động bởi các loại nhiễu, có xét đến thành phần bất định, tính phi tuyến và các loại trễ [4]-[10]. Bên cạnh đó, hướng nghiên cứu thứ hai tập trung vào việc thiết kế các cấu trúc bộ quan sát tiên tiến hơn, như bộ quan sát PI và các dạng tổng quát [11]-[13], nhằm tăng tốc độ hội tụ và cải thiện hiệu quả hoạt động của bộ quan sát. Ngoài ra, hướng nghiên cứu áp dụng bộ quan sát đề xuất ứng dụng cho các hệ thống thực tế (hướng thứ ba) cũng đa dạng, bao gồm các hệ thống định vị quán tính [14]-[16], hệ thống ô tô [17]-[20], và các ứng dụng chẩn đoán lỗi [21]-[22].

Ở hướng thứ nhất, đối tượng nghiên cứu là các hệ thống

Abstract - The paper presents the design of a robust state observer for a class of Lipschitz Nonlinear Parameter-Varying system using a polytopic approach. It compares different cases regarding pole assignment and convergence speed. The paper uses the system norm to minimize the effect of disturbances on the estimation error, where the nonlinear component satisfies the Lipschitz condition. A quadratic Lyapunov function is employed to analyze system stability, through which the observer design is formulated as an LMI problem within the polytopic framework. The proposed observer is implemented to estimate the states of a single-link flexible joint robot model, serving as a benchmark to assess the effectiveness and performance of the developed methodology.

Keywords - Robust H_2 observer; Linear Matrix Inequality; A class of NonLinear Parameter Varying system; polytopic-based approach; single-link flexible joint robot.

phức tạp, có tính phi tuyến, nhiễu tác động. Cụ thể, bài báo [4] sử dụng điều kiện Lipschitz để xử lý phi tuyến trong mô hình giảm chấn và kết hợp chuẩn H_∞ để giảm thiểu tác động của nhiễu đo lường và bất định từ mặt đường; bài báo [6] xây dựng bộ ước lượng để xác định trạng thái của hệ trong khoảng giá trị xác định kết hợp điều kiện Lipschitz giúp giảm thiểu độ không chắc chắn do phi tuyến; bài báo [7] sử dụng điều kiện Lipschitz để đơn giản hóa phi tuyến trong thiết kế và tăng cường hiệu suất bằng cách đồng thời xử lý cả nhiễu đo lường và nhiễu bên ngoài; bài báo [17] mô phỏng và thử nghiệm thực tế cho thấy khả năng xử lý tốt nhiễu đo và các bất định trong vận hành kết hợp với chuẩn H_∞ cho phép thiết kế hiệu quả hơn trong điều kiện nhiễu lớn. Nhìn chung, các bài báo này đều sử dụng điều kiện Lipschitz để xử lý phi tuyến trong các hệ thống điều khiển và quan sát, kết hợp với chuẩn H_∞ hoặc H_2 để giảm thiểu tác động của nhiễu và chưa thấy có sự so sánh giữa các cách tiếp cận H_2 , H_∞ và áp dụng cho cùng một đối tượng.

Nghiên cứu này tập trung vào mở rộng và phát triển bộ quan sát trạng thái bền vững cho một lớp đối tượng phi tuyến (hướng thứ nhất) và ứng dụng cụ thể (hướng thứ ba) là ước lượng trạng thái của mô hình robot khớp linh hoạt một liên kết. Phương pháp đề xuất sử dụng tiêu chuẩn H_2

¹ The University of Danang - University of Technology and Education, Vietnam (Vo Khanh Thoai, Pham Thanh Phong)

² The University of Danang - University of Science and Technology, Vietnam (Le Tien Dung)

nhằm giảm thiểu ảnh hưởng của nhiều hệ thống và nhiều đo lường trong một lớp hệ thống phi tuyến có thông số thay đổi theo thời gian. Thành phần phi tuyến của hệ thống cần thỏa mãn điều kiện Lipschitz nhằm để đảm bảo cho mô hình hóa được chính xác.

Bài toán thiết kế bộ quan sát tìm ma trận $L(\rho)$ được đưa về dạng một bài toán tối ưu lồi dưới ràng buộc bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMI), và được giải thông qua phương pháp tiếp cận đa diện (polytopic approach). Thiết kế bộ quan sát trạng thái bền vững theo chuẩn H_2 cho một lớp đối tượng phi tuyến với tham số thay đổi và chịu tác động của nhiễu là một bài toán có tính thực tiễn cao, không những đảm bảo tối ưu độ chính xác mà còn đòi hỏi tốc độ hội tụ. Bài báo này có hai đóng góp chính như sau:

- So sánh các phương pháp: tiêu chuẩn H_∞ - phù hợp để giảm thiểu nhiễu đầu vào, tiêu chuẩn H_2 và có đặt cực - cho thấy hiệu quả vượt trội trong xử lý nhiễu đo lường, tốc độ hội tụ đồng thời hiệu suất hệ thống phi tuyến cũng được cải thiện trong điều kiện vận hành thực tế.

- Phân tích kết quả mô phỏng ước lượng trạng thái cho mô hình robot một liên kết với khớp linh hoạt trên cả miền tần số và miền thời gian cho thấy sự cải thiện đáng kể về độ chính xác và hiệu suất của bộ quan sát, đặc biệt trong các điều kiện có nhiễu và phi tuyến.

Với cách tiếp cận trên, các phần tiếp theo sẽ trình bày về mô hình toán học dạng phi tuyến thỏa điều kiện Lipschitz với thông số thay đổi (NLPV), thiết kế bộ quan sát cho lớp đối tượng này và áp dụng bộ quan sát đã thiết kế cho mô hình robot khớp linh hoạt một liên kết.

2. Hệ thống phi tuyến dạng Lipschitz với thông số thay đổi (NLPV - NonLinear Parameter Varying system)

Xét một lớp đối tượng phi tuyến với thông số thay đổi được trình bày ở dạng phương trình trạng thái như sau:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\rho)x + B(\rho)u + F(\rho)f(x) + W_1\omega \\ y = Cx + W_2\omega \end{cases} \quad (1)$$

với $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ là véc-tơ trạng thái của hệ thống; $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ là véc-tơ tín hiệu điều khiển; $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ là véc-tơ tín hiệu đo đầu ra; $\omega \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ véc-tơ tín hiệu nhiễu; $\rho \in \mathbb{R}^{n_\rho}$ là véc-tơ biến tham số thay đổi; $A(\rho) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B(\rho) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $F(\rho) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $W_1 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_\omega}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $W_2 \in \mathbb{R}^{n_y \times n_\omega}$ là các ma trận hệ thống, $f(x)$: hàm phi tuyến.

Biến tham số thay đổi (scheduling variable) ρ biến thiên trong một đa diện Y , được xác định bởi các đỉnh tạo thành từ chặn trên và chặn dưới của từng biến thành phần. Các ma trận hệ thống $A(\rho), B(\rho), F(\rho)$ được biểu diễn dưới dạng tổ hợp lồi từ các ma trận tương ứng tại các đỉnh như sau:

$$\begin{aligned} A(\rho) &= \sum_{i=1}^{2^n} \mu_i(\rho) A_i, & B(\rho) &= \sum_{i=1}^{2^n} \mu_i(\rho) B_i, \\ F(\rho) &= \sum_{i=1}^{2^n} \mu_i(\rho) F_i, \end{aligned}$$

Trong đó, $\mu_i(\rho)$ là trọng số lồi (convex weighting function) tương ứng với giá trị ρ hiện tại. *Chỉ số i* đại diện cho số thứ tự của các đỉnh trong đa diện Y .

$\mu_i(\rho) \geq 0$ và thỏa mãn $\sum_{i=1}^{2^n} \mu_i(\rho) = 1$ (đảm bảo tổ hợp lồi). Cách biểu này biến hệ NLPV thành tổ hợp của nhiều hệ tuyến tính tại các điểm đỉnh của Y và có thể xử lý

bằng công cụ LMI.

Hệ thống (1) được mô tả bởi các ma trận hệ thống $A(\rho), B(\rho), F(\rho)$ phụ thuộc vào biến ρ , điều này làm cho lớp đối tượng phi tuyến với thông số thay đổi (1) trở nên tổng quát hơn và bao quát hơn so với các hệ thống phi tuyến truyền thống với ma trận hệ thống cố định. Ngoài ra, lớp phi tuyến với thông số thay đổi này cũng xem xét đến tác động của nhiễu ω , điều này tăng thêm tính thực tiễn khi phân tích và thiết kế bộ quan sát áp dụng cho các hệ thống thực tế.

Biến tham số thay đổi ρ này được giả định là có thể biết được thông qua các cảm biến đo lường hoặc từ các trạng thái đã được ước lượng. Đồng thời, giả thiết được đặt ra rằng hàm phi tuyến $f(x)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz, với định nghĩa như sau:

$$\|f(x) - f(\hat{x})\| \leq L_f \|x - \hat{x}\|, \forall x, \hat{x} \quad (2)$$

Trong đó, L_f là hằng số Lipschitz.

3. Thiết kế bộ quan sát trạng thái

3.1. Về cấu trúc của bộ quan sát trạng thái

Trong bài báo này, cấu trúc bộ quan sát trạng thái Luenberger [3] được mở rộng cho lớp đối tượng phi tuyến với tham số thay đổi (1). Dạng cấu trúc của bộ quan sát được trình bày như sau:

$$\dot{\hat{x}} = A(\rho)\hat{x} + B(\rho)u + F(\rho)f(\hat{x}) + L(\rho)(y - C\hat{x}) \quad (3)$$

với $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ là vector trạng thái ước lượng của vector x ; $A(\rho), B(\rho), F(\rho)$ là các ma trận hệ thống (1) đã biết; nhiệm vụ là xác định ma trận bộ quan sát $L(\rho)$. Ma trận bộ quan sát $L(\rho)$ thỏa mãn tổ hợp:

$$L(\rho) = \sum_{i=1}^{2^n} \mu_i(\rho) L_i, \text{ với } L_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y} \quad (4)$$

Để thiết kế ma trận bộ quan sát $L(\rho)$, ta định nghĩa sai số ước lượng e như sau:

$$e = x - \hat{x} \quad (5)$$

Bằng cách đạo hàm hai vế của phương trình (5), ta được:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \quad (6)$$

Từ các phương trình (1) và (3) và (6), ta viết lại $\dot{e}$ như sau:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A(\rho)x + B(\rho)u + F(\rho)f(x) + W_1\omega \\ &\quad - [A(\rho)\hat{x} + B(\rho)u + F(\rho)f(\hat{x}) + L(\rho)(y - C\hat{x})] \\ &= (A(\rho) - L(\rho)C)e + F(\rho)\Delta f + (W_1 - L(\rho)W_2)\omega \end{aligned} \quad (7)$$

Trong đó, $\Delta f = f(x) - f(\hat{x})$ là phần phi tuyến của hệ thống, gây ra sai lệch giữa trạng thái thực và trạng thái ước lượng.

$L(\rho)$ được thiết kế với mục tiêu thỏa mãn hai điều kiện:

- Để đảm bảo hiệu năng của bộ quan sát, phương trình động học sai số (7) phải đảm bảo rằng hệ thống là ổn định theo nghĩa hàm mũ trong điều kiện không có nhiễu, tức là khi $\omega = 0$.

- Tìm giá trị nhỏ nhất của γ_2 sao cho bất đẳng thức $\frac{\|e(t)\|_\infty}{\|\omega_m(t)\|_2} < \gamma_2$ được đảm bảo trong trường hợp $\omega \neq 0$.

Để đảm bảo hai điều kiện này, từ bài toán thiết kế bộ quan sát, nghĩa là tìm ma trận $L(\rho)$, sẽ được chuyển đổi thành bài toán giải bất phương trình ma trận tuyến tính

LMI. Do đó, phần tiếp theo của bài báo sẽ trình bày chi tiết quá trình chuyển đổi bài toán về dạng điều kiện ma trận tuyến tính (LMI), cùng với phương pháp giải tương ứng nhằm xác định ma trận bộ quan sát tối ưu $L(\rho)$.

3.2. Thiết kế bộ quan sát H_2

Trong phần này, điều kiện dưới dạng bất phương trình LMI được thiết lập nhằm mục tiêu xác định ma trận $L(\rho)$ thỏa mãn các yêu cầu thiết kế. Quá trình thiết lập này dựa trên phân tích ổn định của phương trình động học sai số (7), thông qua việc sử dụng một hàm Lyapunov toàn phương kết hợp với phương pháp đa diện.

Do vậy, để tìm $L(\rho)$ như ở (7) chỉ cần tính toán các ma trận bộ quan sát L_i tại các đỉnh của đa diện, được xác định thông qua việc giải các điều kiện ổn định dưới dạng LMI, thỏa mãn định lý sau:

Định lý 1: Xét hệ thống (1) cùng với bộ quan sát trạng thái được mô tả bởi phương trình (3). Ma trận bộ quan sát được thiết kế sao cho thỏa mãn các điều kiện ổn định và hiệu năng nếu tồn tại một ma trận đối xứng dương P , các ma trận Y_i , $i = 1 \dots 2^{n_p}$, cùng các hằng số dương ε_l, γ_2 . Các đại lượng này là nghiệm của một bài toán tối ưu hóa dưới dạng điều kiện LMI được trình bày dưới đây:

$$\begin{aligned} \min_{P, Y_i, \varepsilon_l} \gamma_2 \\ \text{s.t} \end{aligned} \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega_{1i} + 2\beta P + \varepsilon_l L_f^T L_f & P F_i & \Omega_{2i} \\ F_i^T P & -\varepsilon_l I & 0 \\ \Omega_{2i}^T & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} P & I \\ I & \gamma_2^2 I \end{bmatrix} > 0 \end{cases} \quad (8)$$

với $\Omega_{1i} = A_i^T P + P A_i + C^T Y_i^T + Y_i C$; $\Omega_{2i} = P W_1 + Y_i W_2$.

Khi đó, các ma trận L_i tại các đỉnh của đa diện được xác định từ nghiệm của bài toán LMI (8) tương ứng như sau:

$$L_i = -P^{-1} Y_i \quad (9)$$

Chứng minh định lý 1: Ta chọn hàm Lyapunov với dạng toàn phương, cụ thể như sau:

$$V(e) = e^T P e \quad (10)$$

Trong đó, ma trận P là một ma trận dương, đối xứng.

Bằng cách lấy đạo hàm hai vế của (10), viết lại:

$$\dot{V}(e) = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \quad (11)$$

Thay (7) vào (11), ta được:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= [(A(\rho) - L(\rho)C(\rho))e + F(\rho)\Delta f \\ &\quad + (W_1 - L(\rho)W_2)\omega]^T P e \\ &\quad + e^T P [(A(\rho) - L(\rho)C(\rho))e + F(\rho)\Delta f \\ &\quad + (W_1 - L(\rho)W_2)\omega] \\ &= \begin{bmatrix} e \\ \Delta f \\ \omega \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega_1(\rho) & P F(\rho) & \Omega_2(\rho) \\ F(\rho)^T P & 0 & 0 \\ \Omega_2(\rho)^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \Delta f \\ \omega \end{bmatrix} \quad (12) \end{aligned}$$

với $\Omega_1(\rho) = A^T(\rho)P + P A(\rho) - C^T L^T(\rho)P - P L(\rho)C$, $\Omega_2(\rho) = P(W_1 - L(\rho)W_2)$

Để đơn giản trong trình bày, đặt $\eta = \begin{bmatrix} e \\ \Delta f \\ \omega \end{bmatrix}$, (12) được

viết gọn lại như sau:

$$\dot{V}(e) = \eta^T M(\rho) \eta \quad (13)$$

$$\text{với } M(\rho) = \begin{bmatrix} \Omega_1(\rho) & P F(\rho) & \Omega_2(\rho) \\ F(\rho)^T P & 0 & 0 \\ \Omega_2(\rho)^T & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Chọn tốc độ hội tụ của sai số ước lượng e là β , ta có:

$$\dot{V}(e) + 2\beta V(e) < 0$$

Điều kiện này tương đương với:

$$\eta^T M(\rho) \eta + 2\beta e^T P e < 0$$

hay viết gọn lại $\eta^T \Sigma(\rho) \eta < 0$ (14)

$$\text{với } \Sigma(\rho) = \begin{bmatrix} \Omega_1(\rho) + 2\beta P & P F(\rho) & \Omega_2(\rho) \\ F(\rho)^T P & 0 & 0 \\ \Omega_2(\rho)^T & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Động học sai số ở (7) vừa phải ổn định theo hàm mũ, vừa thỏa mãn điều kiện $\frac{\|e(t)\|_\infty}{\|\omega_m(t)\|_2} < \gamma_2$, sẽ tương đương với hệ bất phương trình sau phải được thỏa mãn:

$$\begin{cases} \dot{V}(e) + 2\beta V(e) - \omega^T \omega < 0 \\ e^T e < \gamma_2^2 e^T P e \end{cases} \quad (15)$$

Hệ bất phương trình (15) được viết về dạng tương đương như sau:

$$\begin{cases} \dot{V}(e) + 2\beta V(e) + \eta^T J_1 \eta < 0 \\ e^T J_2 e > 0 \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{với } J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}, J_2 = \gamma_2^2 P - I.$$

Xem xét điều kiện Lipschitz được trình bày (2), viết lại điều kiện tương đương (2) như sau:

$$\begin{aligned} \Delta f^T \Delta f &\leq e^T L_f^T L_f e \\ \Leftrightarrow \Delta f^T \Delta f - e^T L_f^T L_f e &\leq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Gộp hai điều kiện (16) và (17), theo quá trình S (S-procedure) [23], [24], yêu cầu thỏa mãn điều kiện ổn định theo hàm mũ $\dot{V}(e) + 2\beta V(e) < 0$, $\frac{\|e(t)\|_\infty}{\|\omega_m(t)\|_2} < \gamma_2$, và vừa thỏa điều kiện Lipschitz (2), nếu tồn tại một hệ số $\varepsilon_l > 0$ sao cho:

$$\begin{cases} \dot{V}(e) + 2\beta V(e) + \eta^T J_1 \eta - \varepsilon_l (\Delta f^T \Delta f - e^T L_f^T L_f e) < 0 \\ e^T J_2 e > 0 \end{cases} \quad (18)$$

Viết gọn (18) lại như sau:

$$\begin{cases} \dot{V}(e) + 2\beta V(e) + \eta^T J_1 \eta - \varepsilon_l \eta^T Q \eta < 0 \\ e^T J_2 e > 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{với } Q = \begin{bmatrix} -L_f^T L_f & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kết hợp (14), điều kiện (19) được viết lại là:

$$\begin{cases} \eta^T (\Sigma(\rho) + J_1 - \varepsilon_l Q) \eta < 0 \\ e^T J_2 e > 0 \end{cases} \quad (20)$$

Do đó, điều kiện (20) tương đương với điều kiện sau:

$$\begin{cases} \mathcal{E}(\rho) + J_1 - \varepsilon_l Q < 0 \\ J_2 > 0 \end{cases} \quad (21)$$

Từ các điều kiện ở (14), (16), (19), thay các ma trận $\mathcal{E}(\rho), J_1, J_2, Q$ vào (21), ta được hệ bất phương trình ma trận sau:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega_1(\rho) + 2\beta P + \varepsilon_l L_f^T L_f & PF(\rho) & \Omega_2(\rho) \\ F(\rho)^T P & -\varepsilon_l I & 0 \\ \Omega_2(\rho)^T & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \gamma_2^2 P - I > 0 \end{cases} \quad (22)$$

Thay thế (8) vào (22), suy ra được:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega_{1i} + 2\beta P + \varepsilon_l L_f^T L_f & PF_i & \Omega_{2i} \\ F_i^T P & -\varepsilon_l I & 0 \\ \Omega_{2i}^T & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \gamma_2^2 P - I > 0 \end{cases} \quad (23)$$

với: $\Omega_{1i} = A_i^T P + PA_i + C^T Y_i^T + Y_i C$; $\Omega_{2i} = PW_1 + Y_i W_2$

Đặt $Y_i = -PL_i$ vào (23), bất phương trình thứ hai của (23):

$$\gamma_2^2 P - I > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P & I \\ I & \gamma_2^2 I \end{bmatrix} > 0$$

ta được hệ bất phương trình LMI trong Định lý 1, và định lý đã được chứng minh.

4. Áp dụng vào mô hình robot khớp linh hoạt

Để đánh giá và phân tích hiệu năng của bộ quan sát đề xuất trong cả miền thời gian và miền tần số, phương pháp này được áp dụng nhằm ước lượng các biến trạng thái của mô hình robot một khâu với khớp linh hoạt.

4.1. Mô hình toán học của robot khớp linh hoạt

Trong phần này, mô hình robot khớp linh hoạt một liên kết trong tài liệu [25] được sử dụng để đánh giá hiệu quả của bộ quan sát. Mô hình này bao gồm hai phần chính: động cơ (motor) và khớp (link).

Các biến trạng thái chính của mô hình như sau:

θ_m : góc quay của động cơ,

ω_m : vận tốc góc của động cơ,

θ_l : góc quay của khớp,

ω_l : vận tốc góc của khớp.

Các thông số của hệ thống được cho trong Bảng 1:

Bảng 1. Các thông số của robot khớp linh hoạt một liên kết

Kí hiệu	Tham số	Giá trị	Đơn vị
m	Khối lượng của thanh nối	0,21	kg
$2h$	Chiều dài của thanh	$3,0 \times 10^{-2}$	m
g	Gia tốc trọng trường	9,8	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
k	Hằng số lò xo xoắn	$1,8 \times 10^{-1}$	$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$
K_τ	Hệ số khuếch đại	$8,0 \times 10^{-2}$	$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{V}^{-1}$
B	Hệ số ma sát nhớt	$4,6 \times 10^{-2}$	$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{V}^{-1}$
J_l	Mô men quán tính khớp	$9,3 \times 10^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
J_m	Mô men quán tính động cơ	$3,7 \times 10^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$

Hệ phương trình động học mô tả mối quan hệ giữa các biến trạng thái gồm các phương trình vi phân:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_m &= \omega_m \\ \dot{\omega}_m &= \frac{k}{J_m} (\theta_l - \theta_m) - \frac{B}{J_m} \omega_m + \frac{K_\tau}{J_m} u \\ \dot{\theta}_l &= \omega_l \end{aligned} \quad (24)$$

$$\dot{\omega}_l = -\frac{K}{J_l} (\theta_l - \theta_m) - \frac{mgh}{J_l} \sin(\theta_l)$$

Chọn các trạng thái của hệ thống như sau:

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\theta_m, \omega_m, \theta_l, \omega_l]^T \in \mathbb{R}^4$$

Mô hình được chuyển về dạng trong không gian trạng thái như ở (1) như sau:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\rho)x + B(\rho)u + Ff(x) + W_1\omega \\ y = Cx + W_2\omega \end{cases} \quad (25)$$

Với các ma trận hệ thống $A(\rho), B(\rho), F, W_1, C, W_2$ đã biết.

Trong mô hình (25) này, biến tham số thay đổi ρ được xác định trực tiếp từ trạng thái $x_3(t)$, tức là: $\rho := x_3(t)$. Do đó, giá trị ρ là một biến xác định được tại mọi thời điểm dựa trên cảm biến trạng thái. Miền giá trị của ρ là hữu hạn và được lấy từ khoảng hoạt động thực tế của hệ thống:

$$\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}] = [-\pi/2, \pi/2]$$

Phần phi tuyến $f(x) = -\frac{mgh}{J_l} \sin(x_3)$, do đó $|f'(x_3)| = |\cos(x_3)| \leq 1$, đây là một hàm thỏa mãn điều kiện Lipschitz, vì: $\|\sin(x_3) - \sin(\hat{x}_3)\| \leq L_f |x_3 - \hat{x}_3|$, với hằng số Lipschitz là:

$$L_f = \left| -\frac{mgh}{J_l} \right| = \left| \frac{0,21 \times 9,8 \times 1,5 \cdot 10^{-2}}{9,3 \times 10^{-3}} \right| = 3,33$$

được tính từ tham số vật lý của hệ.

4.2. Thiết kế bộ quan sát và phân tích trong miền tần số

4.2.1. Thiết kế bộ quan sát

Phần này trình bày phương pháp đa diện được sử dụng để giải bài toán LMI (8), qua đó xác định được ma trận $L(\rho)$ của bộ quan sát. Trong đó, ta có $n_x = 4, n_y = 2, n_\omega = 1$. Để giải bài toán tối ưu ở Định lý 1, công cụ CVX [23] trong Matlab được sử dụng để tìm ma trận bộ quan sát tại hai đỉnh của ρ là L_1 và L_2 . Sau đó, ta có ma trận bộ quan sát là:

$$L(\rho) = \frac{\rho - \rho}{\rho - \rho} L_1 + \frac{\rho - \rho}{\rho - \rho} L_2 \quad (26)$$

Ta tìm được $L(\rho)$ dựa vào biểu thức (26) khi có các kết quả L_1 và L_2 , và tính $Y(\rho) = -P(\rho)L(\rho)$ (27)

Áp dụng Định lý 1 với phương pháp đa diện vào mô hình robot khớp linh hoạt một liên kết:

Ta được kết quả như sau: $\gamma_2 = 6,2574\text{e-}04$, $\varepsilon_l = 8,5170\text{e} + 03$ và bộ quan sát tại hai đỉnh của ρ là L_1 và L_2

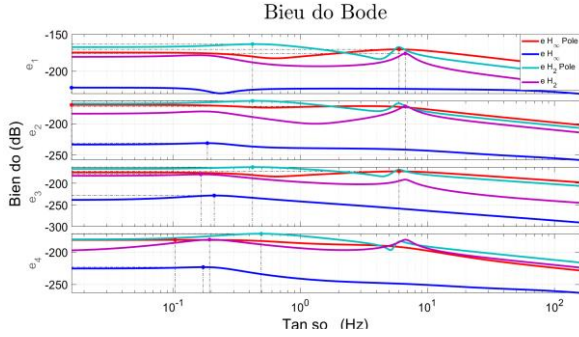
$$L_1 = \begin{bmatrix} 171,3099 & -170,3099 \\ 162,3248 & -161,3248 \\ 150,6201 & -149,6201 \\ 37,5813 & -36,5813 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 147,6832 & -146,6832 \\ 139,3896 & -138,3896 \\ 126,8410 & -125,8410 \\ 20,3442 & -19,3442 \end{bmatrix}$$

4.2.2. Phân tích trong miền tần số

Phần này tập trung phân tích tác động của nhiễu ω lên sai số ước lượng e trong miền tần số, qua đó đánh giá hiệu suất lọc nhiễu của bộ quan sát đề xuất.

Hình 1 thể hiện các đồ thị Bode tương ứng với các hàm truyền mô tả mối quan hệ từ nhiễu ω đến sai số ước lượng

e , nhằm đánh giá khả năng suy giảm nhiễu của bộ quan sát trong miền tần số.



Hình 1. Hàm truyền $\|e/\omega\|$

Từ Hình 1 có thể nhận thấy, đỉnh biên độ của sai số ước lượng e xuất hiện trong dải tần từ 10 đến 20 Hz. Khi tần số tăng cao, biên độ lỗi giảm đáng kể, cho thấy các phương pháp đều có khả năng suy giảm ảnh hưởng của nhiễu ω đối với sai số ước lượng, với mức dự trữ biên tăng dần theo tần số. Nhiễu trong mô phỏng là nhiễu Gaussian có biên độ $\leq 0,01$

Bảng 2. So sánh chuẩn năng lượng các phương pháp

	$\ e\ _\infty$	$\ \omega\ _2$	$\ e\ _\infty/\ \omega\ _2$
H_∞	1,0e-10 * 0,3940976993952	0,03156500232	1,0e-07 * 0,119049242005
H_2	1,0e-10 * 0,3724862906779	0,03156500232	1,0e-07 * 0,112520856200
$H_\infty + pole$	1,0e-10 * 0,3082136000156	0,03156500232	1,0e-07 * 0,09310532772
$H_2 + pole$	1,0e-10 * 0,0563966236918	0,03156500232	1,0e-07 * 0,017036321989

Dựa vào Bảng 2, kết quả cho thấy, cả 4 phương pháp đều ổn định và kháng nhiễu tốt. Trong đó, $H_2 + pole$ giảm lỗi tối đa và kháng nhiễu tốt vượt trội.

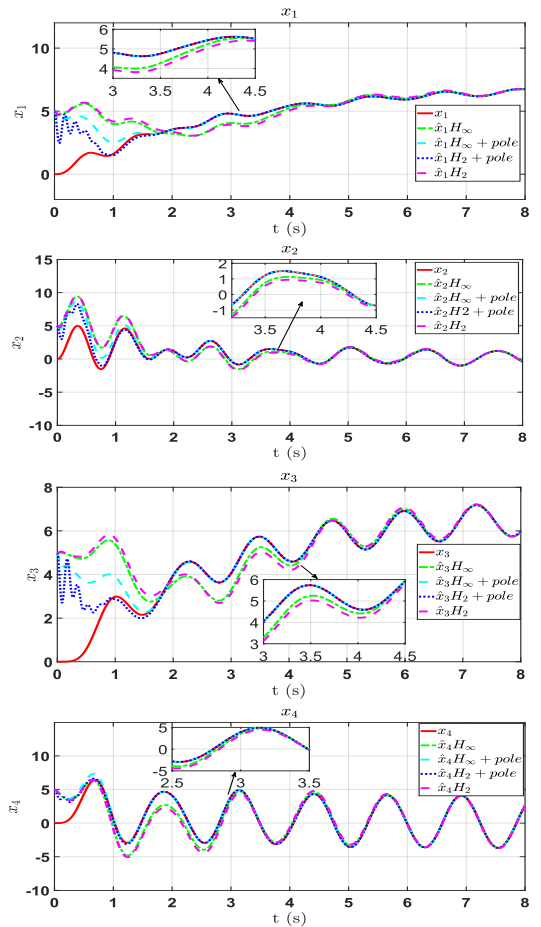
4.3. Một số kết quả mô phỏng

Phần này trình bày mô phỏng trong miền thời gian nhằm tiếp tục đánh giá hiệu năng của bộ quan sát, với các điều kiện ban đầu x_0 của hệ thống và $\hat{x}_0$ của bộ quan sát được thiết lập như sau:

$$x_0 = [0, 0, 0, 0]^T, \quad \hat{x}_0 = [5, 5, 5, 5]^T$$

Tiếp theo là thực hiện so sánh giữa trạng thái thực x và trạng thái ước lượng $\hat{x}$. Việc so sánh này cho phép đánh giá mức độ chính xác và hiệu quả ước lượng trạng thái của phương pháp quan sát được đề xuất. Bài báo so sánh 4 trường hợp như sau: (i) phương pháp dùng bộ quan sát H_∞ thông thường (đường chấm gạch), (ii) bộ quan sát H_∞ có gán điểm cực (nét đứt) như trong bài báo [26], (iii) bộ quan sát NLPV H_2 thông thường (nét đứt mảnh) và (iv) bộ quan sát NLPV H_2 gán điểm cực (đường chấm chấm) là phương pháp đề xuất trong bài báo và hệ thống thật (đường nét liền) như thể hiện ở Hình 2. Kịch bản mô phỏng khi tín hiệu đầu vào dạng hình sin.

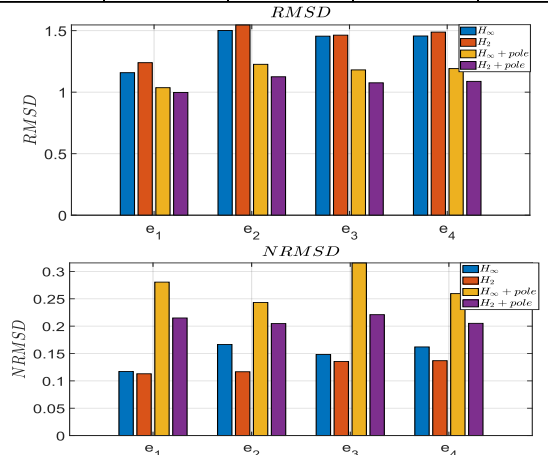
Từ kết quả mô phỏng các trạng thái của robot trên miền thời gian như Hình 2, bộ quan sát đề xuất H_2 gán điểm cực (đường chấm chấm) có khả năng hội tụ nhanh hơn và bám sát trạng thái thực tốt.



Hình 2. Kết quả quan sát trạng thái của robot

Bảng 3. RMSD và NRMSD so sánh các phương pháp

	H_∞	H_2	$H_\infty + pole$	$H_2 + pole$
e_1	1,1583	1,2396	1,0364	0,9972
e_2	1,5013	1,5465	1,2263	1,1250
e_3	1,4551	1,4633	1,1809	1,0759
e_4	1,4566	1,4882	1,1915	1,0877
NRMSD				
e_1	0,1172	0,1130	0,2805	0,2149
e_2	0,1666	0,1167	0,2431	0,2047
e_3	0,1482	0,1354	0,3156	0,2210
e_4	0,1620	0,1369	0,2594	0,2052



Hình 3. Biểu đồ so sánh RMSD và NRMSD

5. Kết luận

Bài báo này đề xuất thiết kế bộ quan sát trạng thái bền vững H_2 cho một lớp đối tượng phi tuyến có tham số thay đổi và chịu ảnh hưởng của nhiễu, nhằm ước lượng chính xác trạng thái hệ thống trong điều kiện bất định. Hiệu quả của bộ quan sát này được kiểm nghiệm trên mô hình robot khớp linh hoạt và so sánh với bộ quan sát H_∞ . Kết quả mô phỏng thể hiện phương pháp mới giúp cải thiện đáng kể tốc độ hội tụ, kể cả độ chính xác ước lượng trạng thái.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật - Đại học Đà Nẵng trong đề tài có mã số T2024-06-05.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", *ASME. J. Basic Eng.*, vol. 82, no.1, pp. 35-45, 1960 <https://doi.org/10.1115/1.3662552>.
- [2] R. E. Kalman and R. S. Bucy, "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory", *ASME. J. Basic Eng.*, vol. 83, no. 1, pp. 95-108, 1961. <https://doi.org/10.1115/1.3658902>
- [3] D. G. Luenberger, "Observing the state of a linear system", *IEEE Transactions on military electronics*, vol. 8, no. 2, pp. 74-80, 1964.
- [4] P. T. Phong, S. Olivier, and L. Dugard, "A nonlinear parameter varying observer for real-time damper force estimation of an automotive electro-rheological suspension system", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 31, no. 17, pp. 8183-8205, 2021. <https://doi.org/10.1002/rnc.5583>
- [5] Y. Wang, R. Rajamani, and D. M. Bevy, "Observer design for parameter varying differentiable nonlinear systems, with application to slip angle estimation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 4, pp. 1940-1945, 2016. DOI: [10.1109/TAC.2016.2587385](https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2587385)
- [6] T. Raissi, D. Efimov, and A. Zolghadri, "Interval state estimation for a class of nonlinear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 1, pp. 260-265, 2011. DOI: [10.1109/TAC.2011.2164820](https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2164820)
- [7] Q. P. Ha and H. Trinh, "State and input simultaneous estimation for a class of nonlinear systems", *Automatica*, vol. 40, no. 10, pp. 1779-1785, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2004.05.012>
- [8] A. Zemouche and M. Boutayeb, "On LMI conditions to design observers for Lipschitz nonlinear systems", *Automatica*, vol. 49, no. 2, pp. 585-591, 2013. [10.1016/j.automatica.2012.11.029](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.11.029)
- [9] S. Raghavan and J. Hedrick, "Observer design for a class of nonlinear systems", *International Journal of Control*, vol. 59, no. 2, pp. 515-528, 1994. <https://doi.org/10.1080/00207179408923090>
- [10] S. Mohite, M. Alma, and A. Zemouche, "Observer-Based Stabilization of Lipschitz Nonlinear Systems by Using a New Matrix-Multiplier Based LMI Approach" *IEEE Control Systems Letters*, vol. 7, p. 3723-3728, 2023. [10.1109/LCSYS.2023.3341549](https://doi.org/10.1109/LCSYS.2023.3341549)
- [11] T. G. Q. Bao, P. T. Phong, and O. Sename, "Multi-objective Grid-based Lipschitz NLPV PI Observer for Damper Fault Estimation", *IFAC-PapersOnLine*, Vol. 55, Issue 6, pp. 163-168, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.07.123>
- [12] D. M. Hung, D. Koenig, and D. Theilliol, "Robust H_∞ proportional-integral observer-based controller for uncertain LPV system", *Journal of the Franklin Institute*, vol. 357, no. 4, pp. 2099-2130, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2019.11.053>
- [13] D. Koenig and S. Mammar, "Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 12, pp. 2057-2062, 2002. DOI: [10.1109/TAC.2002.805675](https://doi.org/10.1109/TAC.2002.805675)
- [14] F. P. Komachali, M. Shafiee, and M. Darouach, "Design of unknown input fractional order proportional-integral observer for fractional order singular systems with application to actuator fault diagnosis", *IET Control Theory and Applications*, vol. 13, no. 14, pp. 2163-2172, 2019. doi.org/10.1049/iet-cta.2018.5712
- [15] P. D. Duong, H. T. Duong, and Y. S. Suh, "Walking monitoring for users of standard and front-wheel walkers", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 66, no. 12, pp. 3289-3298, 2017. DOI: [10.1109/TIM.2017.2745058](https://doi.org/10.1109/TIM.2017.2745058)
- [16] P. D. Duong and D. Q. Vinh, "Combining inertial sensors and a distance sensor in foot motion estimation", *VCCA 2019*, 2019.
- [17] P. T. Phong, O. Sename, and L. Dugard, "Design and Experimental Validation of an H_∞ Observer for Vehicle Damper Force Estimation", *IFAC-PapersOnLine*, vol. 52, no. 5, pp. 673-678, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.09.107>
- [18] P. T. Phong, O. Sename, and L. Dugard, "LPV force observer design and experimental validation from a dynamical semi-active ER damper model", *IFAC-PapersOnLine*, vol. 52, no. 17, 2019, pp. 60-65. [10.1016/j.ifacol.2019.11.027](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.11.027)
- [19] P. T. Phong, T. G. Q. Bao, O. Sename, P. T. T. Van, H. Dung, and N. Q. Dinh, "Real-time Damper Force Estimation for Automotive Suspension: A Generalized H_2 /LPV Approach", *Periodica Polytechnica Transportation Engineering*, vol. 50, no. 4, pp. 309-317, 2022. <https://doi.org/10.3311/PPtr.20076>
- [20] P. T. Phong, O. Sename, and L. Dugard, "Unified H_∞ Observer for a Class of Nonlinear Lipschitz Systems: application to a real ER Automotive Suspension", *IEEE Control Systems Letters*, vol. 3, no. 4, pp. 817-822, 2019. DOI: [10.1109/LCSYS.2019.2919813](https://doi.org/10.1109/LCSYS.2019.2919813)
- [21] M. M. Morato, O. Sename, L. Dugard, and N. M. Quan, "Fault estimation for automotive electro-rheological dampers: LPV-based observer approach". *Control Engineering Practice*, vol. 85, pp.11-22, 2019. DOI: [10.1016/j.conengprac.2019.01.005](https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2019.01.005)
- [22] D. Koenig, "Unknown input proportional multiple-integral observer design for linear descriptor systems: application to state and fault estimation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 2, pp. 212-217, 2005. DOI: [10.1109/TAC.2004.841889](https://doi.org/10.1109/TAC.2004.841889)
- [23] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory", *SIAM*, vol. 15, Philadelphia, PA, 1994.
- [24] C. Briat, *Linear parameter-varying and time-delay systems, Analysis, observation, filtering and control*, Springer, 2014.
- [25] M. Shengya, M. Fanwei, Z. Fan, L. Qi, Z. Yu, and A. Zemouche, "Observer design method for nonlinear generalized systems with nonlinear algebraic constraints with applications", *Automatica*, Vol. 162, no 12, pp. 111512, 2024. DOI [10.1016/j.automatica.2024.111512](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2024.111512)
- [26] H. Dung, P.T. Phong, P. T. T. Van, P. D. Duong, and D. Q. Thien, "Steady state observer H_∞ for Lipschitz nonlinear systems with variable parameters: gridding method", *The University of Danang - Journal of Science and Technology*, vol. 20, no. 11.2, pp. 26-32, 2022.