

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA ĐỒ THỊ GIẢI ĐẤU TÁCH CỰC VỚI BẬC NHỎ NHẤT LÀ 3 KHÔNG CÓ CÁC CHU TRÌNH ĐỈNH RỜI NHAU VỚI ĐỘ DÀI KHÁC NHAU

SOME PROPERTIES OF SPLIT TOURNAMENTS WITH MINIMUM OUT- DEGREE 3 HAVING NO VERTEX-DISJOINT CYCLES OF DIFFERENT LENGTHS

Lê Như Hiền*, Mai Thanh Hồng, Vũ Thị Tuyết Mai, Chu Thị Quyên, Lê Xuân Hùng

Trường Công nghệ Thông tin và Truyền thông - Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội, Việt Nam¹

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: nhuhen060886@gmail.com

(Nhận bài / Received: 09/3/2025; Sửa bài / Revised: 23/6/2025; Chấp nhận đăng / Accepted: 26/6/2025)

DOI: 10.31130/ud-jst.2025.23(7).129

Tóm tắt - Đồ thị giải đấu tách cực là đồ thị có hướng với tập đỉnh được phân hoạch thành hai tập con sao cho đồ thị con cảm ứng trên một tập là đồ thị giải đấu và đồ thị con cảm ứng trên tập kia là đồ thị không có cung. Lớp đồ thị này được quan tâm nghiên cứu nhiều vì chúng liên quan đến vấn đề tổ hợp và khoa học máy tính. Vấn đề nghiên cứu sự tồn tại các chu trình đỉnh rời nhau với độ dài khác nhau trong các đồ thị có hướng được bắt đầu nghiên cứu từ năm 1983 bởi C. Thomassen, cho đến nay đã thu được nhiều kết quả sâu sắc và thú vị. Trong bài báo này nhóm tác giả tiếp tục nghiên cứu chủ đề trên cho lớp đồ thị giải đấu tách cực. Các kết quả đạt được là đã bổ sung một số tính chất của đồ thị giải đấu tách cực với bậc nhỏ nhất là 3 không có các chu trình đỉnh rời nhau có độ dài khác nhau.

Từ khóa - Đồ thị giải đấu; đồ thị giải đấu tách cực; chu trình rời nhau; Đồ thị liên thông mạnh; Chu trình có độ dài khác nhau

1. Đặt vấn đề

Trong bài báo này, nhóm tác giả xét các đơn đồ thị có hướng với số đỉnh hữu hạn, không có khuyên, không có cung bội và không có chu trình độ dài bằng 2. Gọi $D=(V,A)$ là một đồ thị có hướng trong đó V là tập đỉnh và A là tập cung. Với mỗi đỉnh $u \in V$ trong đồ thị có hướng, đỉnh $v \in V$ được gọi là láng giềng ra của đỉnh u nếu $(u,v) \in A$ và gọi là láng giềng vào nếu $(v,u) \in A$. Ký hiệu tập tất cả các láng giềng ra của u là $N_D^+(u)$ (hoặc $N^+(u)$) và tập tất cả các láng giềng vào của u là $N_D^-(u)$ (hoặc $N^-(u)$), $|N_D^+(u)|$ gọi là bậc ra của u và được ký hiệu là $\delta_D^+(u)$ (hoặc $\delta^+(u)$), $|N_D^-(u)|$ gọi là bậc vào của u và được ký hiệu là $\delta_D^-(u)$ (hoặc $\delta^-(u)$), $\min\{\delta_D^+(u) | u \in V\}$ gọi là bậc ra nhỏ nhất và $\min\{\delta_D^-(u) | u \in V\}$ gọi là bậc vào nhỏ nhất của D . Nếu $W \subseteq V$ thì đồ thị con của D cảm ứng bởi tập W được ký hiệu là $D[W]$.

Đồ thị có hướng $D=(V,A)$ gọi là đồ thị giải đấu nếu với mọi cặp đỉnh phân biệt $u,v \in V$ đều tồn tại cung (u,v) hoặc cung (v,u) thuộc A .

Abstract - A split tournament graph is a directed graph with a vertex set partitioned into two subsets such that the induced subgraph on one set is a tournament graph and the induced subgraph on the other set is an arcless graph. This class of graphs is of great interest to researchers because of their relevance to combinatorics and computer science. The problem of studying the existence of vertex-disjoint cycles of different lengths in directed graphs was started in 1983 by C. Thomassen, and has so far yielded many profound and interesting results. In this paper, the authors continue the study of the above topic for the class of split tournament graphs. The results obtained add some properties of split tournaments with minimum out-degree 3 having no vertex-disjoint cycles of different lengths.

Key words - Tournament; Split tournament; vertex-disjoint cycles; Strong digraph; Cycles of different lengths

Đồ thị có hướng $D=(V,A)$ gọi là đồ thị giải đấu tách cực nếu tồn tại phân hoạch $V=I \cup K$, $I \cap K = \emptyset$ sao cho đồ thị $D[K]$ là đồ thị giải đấu, đồ thị $D[I]$ không có cung thuộc A và với mọi cặp đỉnh $u \in I, v \in K$ đều tồn tại cung (u,v) hoặc cung (v,u) thuộc A . Chúng ta ký hiệu đồ thị giải đấu tách cực là $D=ST(I \cup K, A)$.

Hai chu trình C_1 và C_2 của đồ thị D gọi là rời nhau nếu chúng không có đỉnh chung.

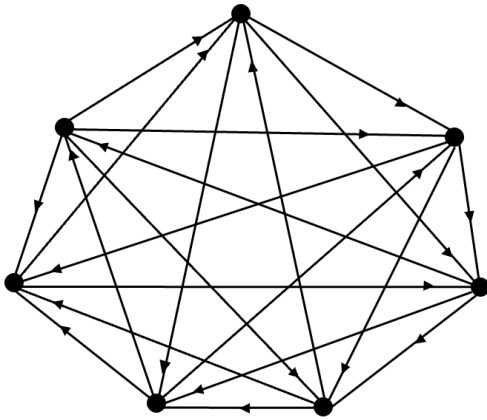
Đồ thị có hướng $D=(V,A)$ gọi là liên thông mạnh nếu với mọi cặp đỉnh phân biệt $u,v \in V$ đều tồn tại đường đi từ u đến v và đường đi từ v đến u . Ngoài ra, các khái niệm và thuật ngữ khác về đồ thị có hướng được tham khảo trong [1].

Từ những năm 1980, các nhà toán học đã nghiên cứu sự tồn tại các chu trình đỉnh rời nhau trong đồ thị có hướng được và đã đạt được nhiều kết quả quan trọng. Năm 1983, Thomassen [2] đã chứng minh được rằng mọi đồ thị có hướng với bậc ra nhỏ nhất ít nhất là 3 đều chứa hai chu trình đỉnh rời nhau. Từ kết quả này, một hướng nghiên cứu mới xuất hiện, đó là trong trường hợp một đồ thị có hướng đã tồn tại các chu trình đỉnh rời nhau thì độ dài các chu trình đó có khác nhau hay không. Với cách tiếp cận này, năm 2012 Henning và Yeo [3] đã đưa ra một giả thuyết rằng mọi đồ thị có hướng với bậc ra nhỏ nhất ít nhất là 4

¹ School of Information and Communications Technology - Hanoi University of Industry, Vietnam (Le Nhu Hien, Mai Thanh Hong, Vu Thi Tuyet Mai, Chu Thi Quyen, Le Xuan Hung)

đều chứa hai chu trình đỉnh rời nhau có độ dài khác nhau. Giả thuyết này đã được chứng minh vào năm 2014 bởi Lichiardopol [4]. Như vậy, với đồ thị có hướng với bậc ra nhỏ nhất là 4, vấn đề đặt ra đã được giải quyết trọn vẹn, còn đối với đồ thị có hướng với bậc ra nhỏ nhất là 3 thì tồn tại các chu trình đỉnh rời nhau nhưng độ dài các chu trình này có thể bằng nhau hoặc khác nhau. Ví dụ, đồ thị D_7^3 trong Hình 1 là một đồ thị có hướng với bậc ra nhỏ nhất là 3 nhưng không tồn tại các chu trình đỉnh rời nhau với độ dài khác nhau.

Trong những năm gần đây, nhiều nhà nghiên cứu đã quan tâm đến các điều kiện đảm bảo sự tồn tại của các chu trình đỉnh rời nhau có độ dài khác nhau trong đồ thị có hướng, điển hình là các kết quả cho lớp đồ thị giải đấu và đồ thị giải đấu hai phần [5], lớp đồ thị giải đấu k phần [6], lớp đồ thị giải đấu bộ phận [7], lớp đồ thị giải đấu giữa các chu trình [8]. Một số kiến thức quan trọng về lớp đồ thị giải đấu được trình bày trong [9]. Với cách tiếp cận đó, trong thời gian gần đây nhóm tác giả đã có một số kết quả nghiên cứu về lớp đồ thị giải đấu tách cực, bước đầu đã chứng minh được một số điều kiện cần để đồ thị giải đấu tách cực liên thông mạnh, có bậc ra nhỏ nhất là 3, nhưng không có các chu trình đỉnh rời nhau với độ dài khác nhau [10].



Hình 1. Đồ thị D_7^3

(Đồ thị giải đấu tách cực có 7 đỉnh, liên thông mạnh, bậc ra nhỏ nhất là 3 nhưng không có các chu trình đỉnh rời nhau với độ dài khác nhau)

Trong bài báo này, nhóm tác giả tiếp tục bổ sung thêm một số tính chất quan trọng về lớp đồ thị giải đấu tách cực liên thông mạnh, có bậc ra nhỏ nhất là 3, nhưng không có các chu trình đỉnh rời nhau với độ dài khác nhau.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Một số kết quả liên quan

Trong bài báo này, luôn giả thiết rằng $D = ST(I \cup K, A)$ là đồ thị giải đấu tách cực liên thông mạnh với bậc ra nhỏ nhất là 3 và không có các chu trình đỉnh rời nhau với độ dài khác nhau.

Vì D có bậc ra nhỏ nhất là 3 nên theo C. Thomassen [2], D có hai chu trình đỉnh rời nhau A^0 và A^1 . Mặt khác, theo giả thiết thì D không có các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau nên chắc chắn A^0 và A^1 phải có cùng độ dài

$t \geq 3$. Với $j \in \{0, 1\}$, đặt

$$A^j = (a_0^j, a_1^j, \dots, a_{t-1}^j, a_0^j),$$

$$V' = V \setminus \left(V(A^0) \cup V(A^1) \right).$$

Dưới đây là một số kết quả đã được chứng minh trong [9].

Bổ đề 1 [10]. Độ dài các chu trình A^0 và A^1 là $t = 3$ và A^j với $j \in \{0, 1\}$, chứa nhiều nhất một đỉnh thuộc I .

Bổ đề 2 [10]. $V' \neq \emptyset$.

Bổ đề 3 [10]. Giả sử $P = (v_1, v_2, \dots, v_l)$ là một đường đi trong $D[V']$. Khi đó, nếu v_l có láng giềng ra trong $V(P)$ thì $l \geq 3$ và v_{l-2} là láng giềng ra duy nhất của v_l trong $V(P)$. Tương tự, nếu v_l có láng giềng vào thì $l \geq 3$ và v_3 là láng giềng vào duy nhất của v_l trong $V(P)$.

Bổ đề 4 [10]. Giả sử $P = (v_1, v_2, \dots, v_l)$ là một đường đi trong $D[V']$. Khi đó

- (i) Nếu v_l có một láng giềng vào trong $V(A^j)$ thì v_l có nhiều nhất một láng giềng ra trong $V(A^j)$ với $j \in \{0, 1\}$,
- (ii) Nếu v_l có hai láng giềng vào trong $V(A^j)$ thì v_l không có láng giềng ra nào trong $V(A^j)$ với $j \in \{0, 1\}$,
- (iii) Nếu v_l có một láng giềng ra trong $V(A^j)$ thì v_l có nhiều nhất một láng giềng vào trong $V(A^j)$ với $j \in \{0, 1\}$,
- (iv) Nếu v_l có hai láng giềng ra trong $V(A^j)$ thì v_l không có láng giềng vào nào trong $V(A^j)$ với $j \in \{0, 1\}$.

Bổ đề 5 [10]. Giả sử $u \in V'$. Đặt

$$X_u = \{v \in V' \mid \text{tồn tại đường đi từ } u \text{ đến } v\}.$$

Khi đó nếu u có hai láng giềng vào thuộc $V(A^j)$ với $j \in \{0, 1\}$, thì với mỗi đỉnh thuộc X_u đều không có láng giềng ra thuộc $V(A^j)$ và không có láng giềng vào thuộc $V(A^{j+1})$.

Bổ đề 6 [10]. Giả sử $u \in V'$. Khi đó

- (i) Nếu $(a_i^j, u) \in A$ thì $(u, a_{i+1}^j) \notin A$,
- (ii) Nếu $(u, a_i^j) \in A$ thì $(a_{i-1}^j, u) \notin A$.

Bổ đề 7 [10]. Giả sử $u \in V'$ và u kề với tất cả các đỉnh của A^j . Khi đó

- (i) Nếu u có một láng giềng ra thuộc $V(A^j)$ thì $(u, v) \in A$ với mọi $v \in V(A^j)$,
- (ii) Nếu u có một láng giềng vào thuộc $V(A^j)$ thì

$(v, u) \in A$ với mọi $v \in V(A^j)$.

Bổ đề 8 [10]. Giả sử $u \in V'$ và u kề với tất cả các đỉnh thuộc $V(A^0) \cup V(A^1)$. Khi đó hoặc là $(a_i^0, u) \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$ và $(u, a_i^1) \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$, hoặc là $(a_i^1, u) \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$ và $(u, a_i^0) \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$.

Bổ đề 9 [10]. Giả sử $u \in V'$, $u \in I$ và $A^j \cap I \neq \emptyset$ với mọi $j \in \{0, 1\}$. Khi đó:

(i) u có nhiều nhất một láng giềng vào thuộc tập $V(A^j)$ với mọi $j \in \{0, 1\}$.

(ii) u có nhiều nhất một láng giềng vào thuộc $V(A^0) \cup V(A^1)$.

(iii) u có ít nhất một láng giềng vào thuộc $V(A^0) \cup V(A^1)$.

(iv) u có đúng một láng giềng vào và có đúng ba láng giềng ra thuộc $V(A^0) \cup V(A^1)$.

Nếu $a_r^0, a_s^1 \in I$ thì hoặc là $(a_{r+2}^0, u) \in A$ và $(u, a_{r+1}^0, a_{s+i}^1) \in A$ với mọi $i \in \{1, 2\}$, hoặc là $(a_{s+2}^1, u) \in A$ và $(u, a_{s+1}^1, a_{r+i}^0) \in A$ với mọi $i \in \{1, 2\}$. Hơn nữa, nếu $(a_{r+2}^0, u) \in A$ (tương ứng, $(a_{s+2}^1, u) \in A$), thì ta cũng có $(a_{r+2}^0, a_{s+i}^1) \in A$ với mọi $i \in \{1, 2\}$ (tương ứng, $(a_s^1, a_{r+i}^0) \in A$) với mọi $i \in \{1, 2\}$.

2.2. Kết quả chính

Trong mục này ta sẽ phát biểu và chứng minh các Định lý 1 và Định lý 2 dưới đây. Trong Định lý 1, chúng ta xác định được mối quan hệ giữa một đỉnh thuộc V' với các đỉnh thuộc $V(A^0) \cup V(A^1)$.

Định lý 1. Giả sử $u \in V' \cap I$, $A^j \cap I \neq \emptyset$ và $A^{j+1} \cap I = \emptyset$ với $j \in \{0, 1\}$. Khi đó

(i) $(u, a_i^{j+1}) \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$,

(ii) Nếu $a_r^j \in I$ thì $(a_{r+i}^j, u) \in A$ với mọi $i \in \{1, 2\}$.

Chứng minh.

1. Chứng minh Khẳng định (i). Bằng cách đổi tên các chu trình A^0 và A^1 ta có thể giả sử rằng $A^0 \cap I \neq \emptyset$ và $A^1 \cap I = \emptyset$. Bằng cách đổi tên các đỉnh thuộc $V(A^0)$ ta có thể giả sử $a_0^0 \in I$. Ta phải chứng minh $(u, a_i^1) \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$. Giả sử u có một láng giềng vào thuộc $V(A^1)$. Theo Bổ đề 8 thì $(a_i^1, u) \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$. Theo Bổ

đề 5 thì $(u, a_i^0) \in A$ với mọi $i \in \{1, 2\}$. Vì D có bậc ra nhỏ nhất là 3 nên tồn tại $v \in V'$ sao cho $(u, v) \in A$. Dễ thấy $v \in K$ (nếu $v \in I$ thì do u cũng thuộc I nên $(u, v) \notin A$). Theo Bổ đề 4 và Bổ đề 8 ta có $(a_i^1, v) \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$ và $(v, a_i^0) \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$.

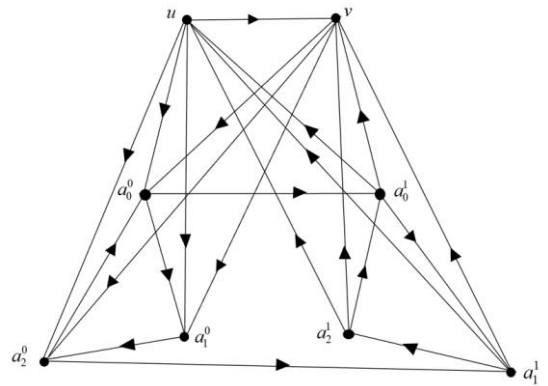
(1.1) Ta sẽ chứng minh mọi đỉnh thuộc $V(A^0)$ đều không có láng giềng ra thuộc V' . (1)

Thật vậy, giả sử tồn tại $w \in V(A^0)$ sao cho w có láng giềng ra $z \in V'$. Nếu $(y, v) \in A$ thì ta suy ra mâu thuẫn với Bổ đề 4, nếu $(v, y) \in A$ thì mâu thuẫn với Bổ đề 5. Do đó, mọi đỉnh thuộc $V(A^0)$ đều không có láng giềng ra thuộc V' .

(1.2) Ta sẽ chứng minh D có hai chu trình đỉnh rời nhau với độ dài khác nhau (2)

Thật vậy, từ (1) suy ra mỗi đỉnh của $V(A^0)$ có ít nhất hai láng giềng ra thuộc $V(A^1)$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $(a_0^0, a_0^1) \in A$ và ta luôn có $(a_2^0, z) \in A$ với $z \in \{a_1^1, a_2^1\}$. Khi đó $C_1 = (a_0^0, a_0^1, v, a_0^0)$ và $C_2 = (a_1^0, a_2^0, z, u, a_1^0)$ là hai chu trình đỉnh rời nhau có độ dài khác nhau, mâu thuẫn (Chứng minh này được minh họa trong Hình 2 với $z = a_1^1$).

Từ (2) ta suy ra mâu thuẫn với giả thiết. Vậy ta đã chứng minh xong $(u, a_i^1) \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$.



Hình 2. Mô tả chứng minh 1.2 trong Định lý 1

2. Chứng minh Khẳng định (ii). Ta phải chứng minh $(a_1^0, u) \in A$ và $(a_2^0, u) \in A$.

2.1. Ta sẽ chứng minh $(a_1^0, u) \in A$ hoặc $(a_2^0, u) \in A$

Giả sử $(u, a_i^0) \in A$ với mọi $i \in \{1, 2\}$. Vì D liên thông

mạnh nên tồn tại đường $P = (v_1, v_2, \dots, v_{l+1})$ sao cho $v_1 \in V(A^0) \cup V(A^1)$, $v_{l+1} = u$, $v_2, \dots, v_l \in V'$. Điều này mâu thuẫn với Bổ đề 4. Do đó, không thể xảy ra trường hợp $(u, a_i^0) \in A$ với mọi $i \in \{1, 2\}$. Từ đó suy ra $(a_1^0, u) \in A$ hoặc $(a_2^0, u) \in A$.

2.2. Ta sẽ chứng minh $(a_2^0, u) \in A$. (3)

Giả sử $(u, a_2^0) \in A$. Khi đó $(a_1^0, u) \in A$, điều này mâu thuẫn Bổ đề 6. Vậy ta chắc chắn có $(a_2^0, u) \in A$.

2.3. Ta sẽ chứng minh $(a_1^0, u) \in A$. (4)

Giả sử $(u, a_1^0) \in A$. Xét hai chu trình đỉnh rời nhau $(A^0)' = \{u, a_1^0, a_2^0, u\}$ và A^1 , áp dụng (i) ta suy ra $(a_0^0, a_i^1) \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$. Giả sử tồn tại $w \in V(A^1)$ sao cho w có láng giềng ra thuộc V' . Theo Bổ đề 7 ta có $(a_i^1, v) \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$. Nếu $v \in I$ thì theo (i), $(v, a_i^1) \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$, mâu thuẫn. Vậy $v \in K$. Từ Bổ đề 8 suy ra $(v, a_i^0) \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$. Nếu $(u, v) \in A$, thì ta xét đường $P = (u, v)$ (ngược lại, nếu $(v, u) \in A$ thì ta xét đường $Q = (v, u)$). Từ đó ta suy ra mâu thuẫn với Bổ đề 4. Như vậy, mọi đỉnh thuộc $V(A^1)$ đều không có láng giềng ra thuộc V' , suy ra mỗi đỉnh thuộc $V(A^1)$ có ít nhất hai láng giềng ra thuộc $V(A^0)$. Do đó với mọi $w \in V(A^1)$ ta có $(w, a_i^0) \in A$ với mọi $i \in \{1, 2\}$. Lúc này a_1^0 có đúng một láng giềng ra thuộc $V(A^0) \cup V(A^1)$ nên tồn tại $z \in V'$ sao cho $(a_1^0, z) \in A$. Hiển nhiên $z \neq u$ (vì ta đang giả sử $(u, a_1^0) \in A$ nên $z \neq u$). Theo Bổ đề 6 thì ta có $(a_2^0, z) \in A$. Theo Bổ đề 5 thì $(z, a_i^1) \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$. Khi đó $C_1 = (a_1^0, z, a_2^1, a_1^0)$ và $C_2 = (a_2^0, u, a_0^1, a_1^0, a_2^0)$ là hai chu trình đỉnh rời nhau có độ dài khác nhau, mâu thuẫn. Vậy ta đã chứng minh xong $(a_1^0, u) \in A$.

Từ (3) và (4) ta suy ra Định lý 1 đã được chứng minh xong. $\square$

Trong Định lý 2 dưới đây, chúng ta chứng minh được một số tính chất khi V' chứa hai đỉnh kề nhau.

Định lý 2. Giả sử V' chứa hai đỉnh kề nhau. Khi đó

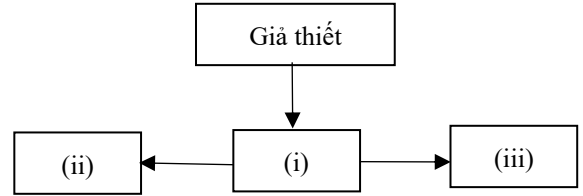
(i) Tồn tại $j \in \{0, 1\}$ sao cho mọi đỉnh thuộc $V(A^j)$

không có láng giềng ra thuộc V' ,

(ii) V' không chứa đỉnh $u \in I$ sao cho $A^j \cap I \neq \emptyset$ với mọi $j \in \{0, 1\}$,

(iii) Giả sử mọi đỉnh của $V(A^1)$ không có láng giềng ra thuộc V' . Khi đó V' không chứa đỉnh u với $u \in I$ sao cho $A^0 \cap I \neq \emptyset$ và $A^1 \cap I = \emptyset$.

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh Định lý 2 theo sơ đồ sau (Hình 4):



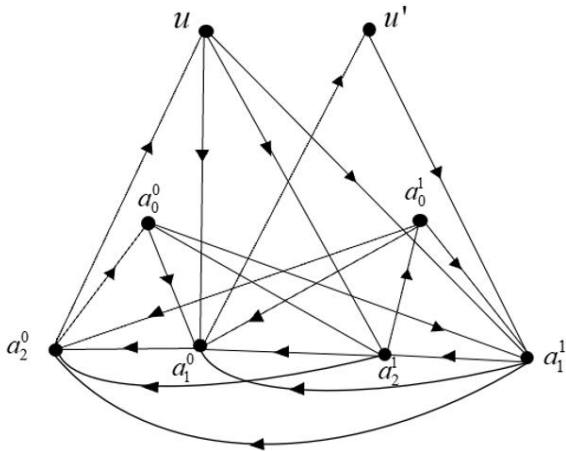
Hình 4. Sơ đồ chứng minh Định lý 2

1. *Chứng minh Khẳng định (i).* Giả sử V' chứa u và v sao cho u có láng giềng vào thuộc $V(A^0)$, v có láng giềng vào thuộc $V(A^1)$. Không mất tính tổng quát giả sử $(a_0^0, u) \in A$, $(a_0^1, v) \in A$ sao cho u và v kề nhau (chú ý là, trong trường hợp u và v không kề nhau, tức là u và v đều thuộc I , thì theo giả thiết sẽ tồn tại $u' \in K$, theo Bổ đề 8 thì u' sẽ có láng giềng vào thuộc $V(A^0) \cup V(A^1)$). Khi đó ta sẽ xét u và u' (hoặc v và u' thay cho u và v). Theo Định lý 1 và các Bổ đề 8, 9 ta suy ra u có ít nhất hai láng giềng ra trong $V(A^1)$, v có ít nhất hai láng giềng ra trong $V(A^0)$. Nếu $(u, v) \in A$ thì xét đường $P = (u, v)$ (ngược lại, nếu $(v, u) \in A$ thì xét đường $Q = (v, u)$). Từ đó ta dẫn đến mâu thuẫn với Bổ đề 4.

2. *Chứng minh Khẳng định (ii).* Giả sử tồn tại đỉnh $u \in I$ sao cho $A^j \cap I \neq \emptyset$ với mọi $j \in \{0, 1\}$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_0^0, a_0^1 \in I$. Theo (i) ta có thể giả sử mọi đỉnh thuộc V' không có láng giềng vào thuộc $V(A^1)$. Theo Bổ đề 9, $(a_2^0, u), (u, a_0^1), (u, a_1^1), (u, a_2^1) \in A$. Vì a_0^1 không kề với a_0^0 nên $(a_0^0, a_1^1) \in A$ với mọi $i \in \{1, 2\}$. Vì mọi đỉnh của $V(A^1)$ đều không có láng giềng ra thuộc V' nên ta có $(a_i^1, a_1^0), (a_i^1, a_2^0) \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$.

Vì a_1^0 có đúng một láng giềng ra thuộc $V(A^0) \cup V(A^1)$ nên tồn tại $u' \in V'$ sao cho $(a_1^0, u') \in A$. Dễ thấy $u \neq u'$ và $(u', a_1^1) \in A$. Suy ra (u', a_1^1, a_1^0, u') và $(u, a_2^1, a_0^1, a_2^0, u)$ là hai chu trình đỉnh rời nhau có độ dài

khác nhau, mâu thuẫn (Chứng minh này được minh họa trong Hình 3).



Hình 3. Mô tả chứng minh phản Chứng minh Khẳng định (ii) trong Định lý 2

3. Chứng minh Khẳng định (iii). Giả sử phản chứng rằng V' chứa đỉnh u với $u \in I$ sao cho $A^0 \cap I \neq \emptyset$ và $A^1 \cap I = \emptyset$. Vì $A^0 \cap I \neq \emptyset$ nên $V(A^0)$ có đúng một đỉnh thuộc I . Bằng cách đổi tên các đỉnh thuộc $V(A^0)$, ta giả sử rằng $a_0^0 \in I$ (chẳng hạn, nếu $a_1^0 \in I$ thì ta đổi tên a_1^0 thành a_0^0 , a_2^0 thành a_1^0 và a_0^0 thành a_2^0). Theo Bổ đề 9, $\{a_i^0, u\} \in A$ với mọi $i \in \{1, 2\}$ và $\{u, a_i^1\} \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$.

Vì V' chứa hai đỉnh kề nhau nên tồn tại $v \in V'$, $v \in K$, suy ra v kề với tất cả các đỉnh thuộc $V(A^0) \cup V(A^1)$. Theo (i) và Bổ đề 8 ta có $(v, a_i^1) \in A$ và $(a_i^0, v) \in A$ với mọi $i \in \{0, 1, 2\}$.

Giả sử a_0^0 có láng giềng vào thuộc $V(A^1)$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $(a_0^1, a_0^0) \in A$. Vì (i) nên $(a_2^1, a_1^0) \in A$ hoặc $(a_2^1, a_2^0) \in A$. Do đó, (v, a_0^1, a_0^0, v) và $(u, a_1^1, a_2^1, a_1^0, u)$ (hoặc $(u, a_1^1, a_2^1, a_2^0, u)$) là hai chu trình đỉnh rời nhau có độ dài khác nhau, mâu thuẫn. Suy ra, $(w, a_i^0) \in A$ với mọi $i \in \{1, 2\}$ và $w \in V(A^1)$. Suy ra, (u, a_1^1, a_0^1, u) và $(v, a_2^1, a_2^0, a_0^0, v)$ là hai chu trình đỉnh rời nhau có độ dài khác nhau, mâu thuẫn.

Ta đã chứng minh xong Định lý 2. $\square$

3. Kết luận

Trong những năm gần đây, việc xác định xem có tồn tại hay không các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau trong đồ thị có hướng với bậc nhỏ nhất là 3 luôn được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Các kết quả đạt được là tương đối sâu sắc và phong phú. Tuy nhiên vẫn chưa giải quyết được một cách tổng quát như trường hợp đồ thị có bậc nhỏ nhất là 4, các kết quả đạt được cho trường hợp bậc nhỏ nhất là 3 mới chỉ giải quyết được cho một số lớp đồ thị nào đó. Chính vì vậy, rất cần các nghiên cứu tiếp theo về chủ đề này. Với xu thế đó, nhóm tác giả tập trung nghiên cứu cho lớp đồ thị giải đấu tách cực với mong muốn giải quyết được trọn vẹn cho lớp đồ thị này. Bước đầu, nhóm tác giả đã có một số kết quả cơ bản và quan trọng (xem [9]), làm cơ sở để đi đến kết quả mong muốn. Trong bài báo này, nhóm tác giả tiếp tục chứng minh được một số tính chất quan trọng khác (Định lý 1 và Định lý 2), hy vọng những kết quả này và những kết quả trước đó sẽ giúp nhóm tác giả giải quyết được vấn đề đặt ra một cách đầy đủ. Trong thời gian sắp tới, nhóm tác giả vẫn tiếp tục nghiên cứu chủ đề này và hy vọng đạt được những kết quả sâu sắc hơn.

Lời cảm ơn: Nhóm tác giả xin chân thành cảm ơn các phản biện bài báo và ban biên tập đã có nhiều góp ý quan trọng giúp cho bài báo được trình bày một cách đầy đủ và khoa học hơn. Nhóm tác giả cũng chân thành cảm ơn Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội đã tạo điều kiện thuận lợi nhất để hoàn thành bài báo này, đóng góp vào đề tài nghiên cứu cấp trường “Sự tồn tại các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau trong đồ thị giải đấu tách cực”.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] J. Bang-Jensen and G. Gutin, *Digraphs. Theory, Algorithms and Applications*, Springer, New York, 2001.
- [2] C. Thomassen, “Disjoint cycles in digraphs”, *Combinatorica*, vol. 3, pp. 393 – 396, 1983.
- [3] M. A. Henning and A. Yeo, “Vertex disjoint cycles of different length in digraphs”, *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 26, pp. 687 – 694, 2012.
- [4] N. Lichiardopol, “Proof of a conjecture of Henning and Yeo on vertex-disjoint directed cycles”, *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 28, pp. 1618 – 1627, 2014.
- [5] N. D. Tan, “Tournaments and bipartite tournaments without vertex disjoint cycles of different lengths”, *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 35, no. 1, pp. 485 – 494, 2021.
- [6] L. X. Hung, D. D. Hieu, and N. D. Tan, “Vertex-disjoint cycles of different lengths in multipartite tournaments”, *Discrete Math.*, vol. 345, Art. no. 112819, 2022.
- [7] L. X. Hung and N. D. Tan, “Vertex-Disjoint Cycles of Different Lengths in Local Tournaments”, *Graphs and Combinatorics*, vol. 39, no. 5, Art. no. 92, 2023.
- [8] L. X. Hung, “Vertex-disjoint cycles of different lengths in tournaments of cycles”, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 22, No. 1, pp. 46 – 53, 2025. <https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.004>
- [9] J. Bang-Jensen and F. Havet, “Tournaments and semicomplete digraphs”, In: *Classes of Directed Graphs* (J. Bang-Jensen and F. Havet, eds), pp. 35 – 124, Springer, New York, 2018.
- [10] L. N. Hien, M. T. Hong, V. T. T. Mai, C. T. Quyen, and L. X. Hung, “Some necessary conditions for split tournaments having no disjoint cycles of different lengths”, *TNU Journal of Science and Technology*, vol. 230, no. 07, pp. 3 – 11, 2025. DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.11722>