

LUẬT SỐ LỚN CHO DÃY BIẾN NGẪU NHIÊN ĐỘC LẬP ĐÔI MỘT BỊ CHẶN NGẪU NHIÊN

LAWS OF LARGE NUMBERS FOR A SEQUENCE OF PAIRWISE INDEPENDENT STOCHASTICALLY DOMINATED RANDOM VARIABLES

Tôn Thất Tú*

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, Việt Nam¹

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: ttu@ued.udn.vn

(Nhận bài / Received: 18/3/2025; Sửa bài / Revised: 11/4/2025; Chấp nhận đăng / Accepted: 16/4/2025)

DOI: 10.31130/ud-jst.2025.145

Tóm tắt - Các định lý giới hạn trong lý thuyết xác suất cổ điển thường dựa trên giả thiết các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng phân phối. Những luật số lớn cơ bản như luật yếu số lớn và luật mạnh số lớn của Kolmogorov, hay luật yếu số lớn của Marcinkiewicz-Zygmund đều được thiết lập dưới các giả thiết này. Tuy nhiên, trong thực tế, giữa các biến ngẫu nhiên thường tồn tại những mối quan hệ phức tạp hơn, đòi hỏi các giả thiết linh hoạt hơn để phản ánh đúng bản chất của hiện tượng. Trong bài báo này, thay vì giả thiết về độc lập hoàn toàn và cùng phân phối, tác giả xây dựng các kết quả dựa trên giả thiết về tính độc lập đôi một và tính bị chặn ngẫu nhiên của dãy các biến ngẫu nhiên. Điều này cho phép mở rộng các luật số lớn cổ điển, phù hợp hơn với các tình huống thực tế phức tạp. Ngoài ra, tác giả cũng thiết lập các luật số lớn cho tổng có trọng số của các biến ngẫu nhiên, qua đó mở rộng các kết quả cổ điển của Kolmogorov và Marcinkiewicz-Zygmund.

Từ khóa - Luật số lớn; độc lập đôi một; bị chặn ngẫu nhiên; tổng có trọng số

1. Đặt vấn đề

Các định lý giới hạn đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết xác suất và được ứng dụng rộng rãi trong các bài toán thống kê, chẳng hạn như bài toán ước lượng tham số và bài toán kiểm định giả thuyết thống kê. Nhiều luật số lớn được các nhà nghiên cứu xây dựng. Luật yếu số lớn đơn giản nhất có dạng:

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P} 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty,$$

trong đó, $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối với kỳ vọng bằng 0.

Tổng quát kết quả trên, luật yếu số lớn của Marcinkiewicz-Zygmund [2] phát biểu rằng: Giả sử $X, X_1, X_2, \dots$ là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối sao cho $E(|X|^r) < +\infty$ với $0 < r < 2$. Giả sử thêm rằng $E(X) = 0$ khi $1 \leq r < 2$. Khi đó,

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{P} 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Nhiều tác giả đã quan tâm nghiên cứu luật số lớn dạng Marcinkiewicz-Zygmund. Cụ thể, Sung [3] đã mở rộng dạng luật mạnh số lớn này cho dãy các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một, trong khi Boukhari [4] nghiên cứu trường hợp các biến ngẫu nhiên phụ thuộc. Tác giả Dũng [5] mở rộng

Abstract - Classical limit theorems in probability theory are typically based on the assumption that random variables are independent and identically distributed. Fundamental laws of large numbers, such as the weak and strong laws of large numbers by Kolmogorov and the weak law by Marcinkiewicz-Zygmund, were established under these assumptions. However, in practice, random variables often exhibit more complex relationships that require more flexible assumptions to accurately capture the nature of real-world phenomena. In this paper, instead of assuming complete independence and identical distribution, the author establishes results based on the assumptions of pairwise independence and stochastic domination of the sequence of random variables. This allows for an extension of classical laws of large numbers, making them more suitable for complex real-world situations. In addition, the author establishes laws of large numbers for weighted sums of random variables, further generalizing the classical results of Kolmogorov and Marcinkiewicz-Zygmund.

Key words - Laws of large numbers; pairwise independence; stochastically dominated; weighted sums

luật số lớn này cho trường hợp mảng hai chỉ số của các biến ngẫu nhiên.

Mặt khác, luật mạnh số lớn do Kolmogorov phát biểu áp dụng cho dãy biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối và có kỳ vọng hữu hạn. Một điều kiện đủ về luật mạnh số lớn Kolmogorov [2] cho dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ độc lập với trung bình bằng 0 và phương sai hữu hạn với mọi $n \geq 1$ được phát biểu như sau: Nếu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{V(X_n)}{n^2} < +\infty,$$

thì

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow 0 \text{ (h.c.c)}$$

khi $n \rightarrow +\infty$.

Trong thực tế, các hệ thống phức tạp thường có nhiều yếu tố ảnh hưởng hoặc các mối quan hệ gián tiếp mà ta không dễ dàng nhận thấy, khiến cho sự độc lập hoàn toàn gần như không thể đạt được hoặc không thể chứng minh rõ ràng. Vì vậy trong bài báo này, tác giả sẽ nghiên cứu mở rộng luật yếu số lớn dạng Marcinkiewicz-Zygmund cho dãy các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một bị chặn ngẫu nhiên. Một điều kiện đủ về luật số lớn Kolmogorov cũng được xây dựng.

¹ The University of Danang - University of Science and Education, Vietnam (Ton That Tu)

Định nghĩa 1. Dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là độc lập đôi một nếu hai biến ngẫu bất kỳ X_i, X_j với $i \neq j$ độc lập với nhau.

Định nghĩa 2. Dãy biến ngẫu nhiên thực $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là trực giao nếu với hai biến ngẫu nhiên bất kỳ X_i, X_j với $i \neq j$ ta luôn có $E(X_i X_j) = 0$.

Nhận xét 1. Nếu $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập đôi một có kỳ vọng hữu hạn thì $\{X_n - EX_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên trực giao.

Định nghĩa 3. Dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X nếu với mọi $t > 0$ ta luôn có:

$$\sup_n P(|X_n| > t) \leq P(|X| > t).$$

Dễ thấy rằng, nếu $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên có cùng phân phối với biến ngẫu nhiên X thì dãy này bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X .

Bổ đề 1. [1] Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên trực giao. Khi đó,

$$E\left(\max_{1 \leq j \leq n} \left|\sum_{i=1}^j X_i\right|^2\right) \leq \left(\frac{\ln 4n}{\ln 2}\right)^2 \sum_{i=1}^n E|X_i|^2.$$

Bổ đề 2. [5] Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên và đặt $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Cho $\{b_n, n \geq 1\}$ là dãy số dương tăng thỏa điều kiện:

$$0 < b_n \uparrow +\infty \text{ và } b_{2n}/b_n = O(1).$$

Khi đó, nếu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| > \varepsilon b_n\right) < +\infty,$$

với mọi $\varepsilon > 0$ thì $S_n/b_n \rightarrow 0$ (h.c.c).

Bổ đề 3. Cho $p, q > 0$. Nếu $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X có $E(|X|^p) < +\infty$ thì với mọi $n \geq 1$ và $x > 0$ ta có:

$$i) E(|X_n|^q I\{|X_n| \leq x\})$$

$$\leq E(|X|^q I\{|X| \leq x\}) + x^q P(|X| > x).$$

ii) $E(|X_n|^q I\{|X_n| > x\}) \leq E(|X|^q I\{|X| > x\})$ với giả thiết $q \leq p$.

Chứng minh:

i) Ta có:

$$E(|X_n|^q I\{|X_n| \leq x\})$$

$$= \int_0^x t^q dP(|X_n| \leq t) = - \int_0^x t^q dP(|X_n| > t)$$

$$= -x^q P(|X_n| > x) + \int_0^x P(|X_n| > t) dt^q$$

$$\leq \int_0^x P(|X| > t) dt^q$$

$$= x^q P(|X| > x) - \int_0^x t^q dP(|X| > t)$$

$$= x^q P(|X| > x) + \int_0^x t^q dP(|X| \leq t)$$

$$= x^q P(|X| > x) + E(|X|^q I\{|X| \leq x\}).$$

ii) Tương tự, với $q \leq p$ ta có:

$$E(|X_n|^q I\{|X_n| > x\}) = \int_x^{+\infty} t^q dP(|X_n| \leq t)$$

$$= - \int_x^{+\infty} t^q dP(|X_n| > t)$$

$$= x^q P(|X_n| > x) + \int_x^{+\infty} P(|X_n| > t) dt^q$$

(vì $E(|X_n|^q) < +\infty$ theo nhận xét 2)

$$\leq x^q P(|X| > x) + \int_x^{+\infty} P(|X| > t) dt^q$$

$$= E(|X|^q I\{|X| > x\}).$$

Nhận xét 2. Trong điều kiện của Bổ đề 3, với $q \leq p$ khi cho $x \rightarrow +\infty$ từ i) ta được:

$$E(|X_n|^q) \leq E(|X|^q), \forall n \geq 1.$$

2. Kết quả nghiên cứu

Trong các phép chứng minh ở mục này, hằng số C là hằng số dương tổng quát với giá trị có thể thay đổi ở mỗi lần xuất hiện.

Định lý 1. Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập đôi một và bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X với $E(|X|^r) < +\infty, 1 \leq r < 2$. Giả sử $\{a_n, n \geq 1\}$ và $\{b_n, n \geq 1\}$ là dãy các số thực dương, $0 < b_n \uparrow +\infty$ thỏa điều kiện:

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = O(n) \text{ và } \frac{b_n}{n} \in [c_0, c_1], \forall n \geq 1,$$

với c_0, c_1 là các số thực dương. Đặt $S_n = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$. Khi đó,

$$\frac{1}{b_n^{1/r}} (S_n - ES_n) \xrightarrow{P} 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Chứng minh:

Lấy $\varepsilon > 0$ và với $k = 1, 2, \dots, n$ ta đặt:

$$Y_{k,n} = X_k I\{|X_k| \leq b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}\} \text{ và } S'_n = \sum_{k=1}^n a_n Y_{k,n}.$$

Khi đó, ta có:

$$P(|S_n - ES'_n| > b_n^{1/r} \varepsilon)$$

$$= P\left(|S_n - ES'_n| > b_n^{1/r} \varepsilon, \bigcap_{k=1}^n \{|X_k| \leq b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}\}\right) +$$

$$P\left(|S_n - ES'_n| > b_n^{1/r} \varepsilon, \bigcup_{k=1}^n \{|X_k| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}\}\right)$$

$$\leq P(|S'_n - ES'_n| > b_n^{1/r} \varepsilon) + \sum_{k=1}^n P(|X_k| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)})$$

$$\leq \frac{1}{b_n^{2/r} \varepsilon^2} V(S'_n) + \sum_{k=1}^n P(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)})$$

$$= \frac{1}{b_n^{2/r} \varepsilon^2} \sum_{k=1}^n a_k^2 V(Y_{k,n}) + nP(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)})$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{b_n^{2/r} \varepsilon^2} \sum_{k=1}^n a_k^2 E(Y_{k,n}^2) + nP(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}) \\
&\leq \frac{1}{b_n^{2/r} \varepsilon^2} \sum_{k=1}^n a_k^2 E(|X_k|^2 I\{|X_k| \leq b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}\}) \\
&\quad + nP(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}) \\
&\leq \frac{C\varepsilon}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k^2 E(|X_k|^r I\{|X_k| \leq b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}\}) \\
&\quad + nP(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}) \\
&\leq \frac{C\varepsilon}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k^2 E(|X|^r I\{|X| \leq b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}\}) \\
&\quad + C \sum_{k=1}^n a_k^2 P(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}) \\
&\quad + nP(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}) \\
&\leq C\varepsilon E(|X|^r) \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{b_n} + C b_n P(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}) \\
&\leq C\varepsilon E(|X|^r) + C b_n P(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}) \\
&\leq C\varepsilon E(|X|^r) + C b_n \int_{b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}}^{+\infty} dP(|X| \leq t) \\
&\leq C\varepsilon E(|X|^r) + C \int_{\frac{1}{b_n^r \varepsilon^{2-r}}}^{+\infty} t^r dP(|X| \leq t).
\end{aligned}$$

Vì $E(|X|^r) < +\infty$ nên

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}}^{+\infty} t^r dP(|X| \leq t) = 0.$$

Do đó,

$$\limsup_n P(|S_n - ES'_n| > b_n^{1/r} \varepsilon) \leq C\varepsilon E(|X|^r).$$

Vì $\varepsilon > 0$ tùy ý nên $\limsup_n P(|S_n - ES'_n| > b_n^{1/r} \varepsilon) = 0$.

Từ đó, suy ra

$$\frac{S_n - ES'_n}{b_n^{1/r}} \xrightarrow{P} 0.$$

Mặt khác, ta lại có:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b_n^{1/r}} |ES_n - ES'_n| &\leq \frac{1}{b_n^{1/r}} E|S_n - S'_n| \\
&\leq \frac{1}{b_n^{1/r}} \sum_{k=1}^n a_k E(|X_k| I\{|X_k| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}\}) \\
&\leq \frac{1}{b_n^{1/r}} \sum_{k=1}^n a_k E(|X| I\{|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}\}) \\
&\leq C \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k E(|X|^r I\{|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}\}) \\
&\leq \frac{C}{b_n} E(|X|^r I\{|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}\}) \sqrt{n \sum_{k=1}^n a_k^2} \\
&= CE(|X|^r I\{|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}\}) \frac{n}{b_n} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^2}
\end{aligned}$$

$$\leq CE(|X|^r I\{|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}\}).$$

Vì $E(|X|^r) < +\infty$ nên

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X|^r I\{|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^{3/(2-r)}\}) = 0.$$

Do đó,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n} |ES_n - ES'_n| = 0.$$

Định lý được chứng minh. ■

Nhận xét 3. Luật yếu số lớn Marcinkiewicz-Zygmund được trình bày ở mục 1 là trường hợp riêng của Định lý 1 khi chọn $a_i = 1$ với mọi $i \geq 1$ và $b_n = n$ với mọi $n \geq 1$.

Định lý 2. Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập đôi một và bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X với $E(|X|^r) < +\infty, 0 < r < 2$. Giả sử $\{a_n, n \geq 1\}$ và $\{b_n, n \geq 1\}$ là dãy các số thực dương, $0 < b_n \uparrow +\infty$ thỏa điều kiện:

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = O(n) \text{ và } \frac{b_n}{n} \in [c_0, c_1], \forall n \geq 1,$$

với c_0, c_1 là các số thực dương.

Khi đó, ta có:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n} P\left(\left|\sum_{k=1}^n a_k \left(X_k - E\left(X_k I\left\{|X_k| \leq b_n^{1/r}\right\}\right)\right)\right| > b_n^{1/r} \varepsilon\right)$$

hội tụ với mọi $\varepsilon > 0$.

Chứng minh:

Lấy $\varepsilon > 0$ và với $k = 1, 2, \dots, n$ ta đặt:

$$Y_{k,n} = X_k I\{|X_k| \leq b_n^{1/r}\} \text{ và } S'_n = \sum_{k=1}^n a_n Y_{k,n}.$$

Khi đó, tương tự cách chứng minh Định lý 1 ta cũng có

$$P(|S_n - ES'_n| > b_n^{1/r} \varepsilon)$$

$$\leq P(|S'_n - ES'_n| > b_n^{1/r} \varepsilon) + \sum_{k=1}^n P(|X_k| > b_n^{1/r})$$

$$\leq \frac{1}{b_n^{2/r} \varepsilon^2} V(S'_n) + \sum_{k=1}^n P(|X| > b_n^{1/r})$$

$$= \frac{1}{b_n^{2/r} \varepsilon^2} \sum_{k=1}^n a_k^2 V(Y_{k,n}) + nP(|X| > b_n^{1/r})$$

$$\leq \frac{1}{b_n^{2/r} \varepsilon^2} \sum_{k=1}^n a_k^2 E(Y_{k,n}^2) + nP(|X| > b_n^{1/r})$$

$$\leq \frac{1}{b_n^{2/r} \varepsilon^2} \sum_{k=1}^n a_k^2 E(|X_k|^2 I\{|X_k| \leq b_n^{1/r}\}) + nP(|X| > b_n^{1/r})$$

$$\leq \frac{1}{b_n^{2/r} \varepsilon^2} \sum_{k=1}^n a_k^2 E(|X|^2 I\{|X| \leq b_n^{1/r}\})$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^n a_k^2 P(|X| > b_n^{1/r}) + nP(|X| > b_n^{1/r})$$

$$\leq \frac{Cn}{b_n^{2/r}} E(|X|^2 I\{|X| \leq b_n^{1/r}\}) + CnP(|X| > b_n^{1/r}).$$

Do đó,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n} P\left(|S_n - ES'_n| > b_n^{\frac{1}{r}} \varepsilon\right) \\ & \leq C \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n^{2/r}} E(|X|^2 I\{|X| \leq b_n^{1/r}\}) \\ & \quad + C \sum_{n=1}^{+\infty} P(|X| > b_n^{1/r}). \end{aligned}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n^{2/r}} E(|X|^2 I\{|X| \leq b_n^{1/r}\}) \\ & = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n^{2/r}} \sum_{k=1}^n E(|X|^2 I\{b_{k-1}^{1/r} < |X| \leq b_k^{1/r}\}) \\ & = \sum_{k=1}^{+\infty} E(|X|^2 I\{b_{k-1}^{1/r} < |X| \leq b_k^{1/r}\}) \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{b_n^{2/r}} \\ & \leq C \sum_{k=1}^{+\infty} E(|X|^2 I\{b_{k-1}^{1/r} < |X| \leq b_k^{1/r}\}) \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/r}} \\ & \leq C \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2/r-1}} E(|X|^2 I\{b_{k-1}^{1/r} < |X| \leq b_k^{1/r}\}) \\ & \leq C \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k^{2/r-1}}{k^{2/r-1}} E(|X|^r I\{b_{k-1}^{1/r} < |X| \leq b_k^{1/r}\}) \\ & \leq C \sum_{k=1}^{+\infty} E(|X|^r I\{b_{k-1}^{1/r} < |X| \leq b_k^{1/r}\}) \\ & = CE(|X|^r) < +\infty, \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} P(|X| > b_n^{1/r}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(|X| > (c_0 n)^{1/r}) \\ & = \sum_{n=1}^{+\infty} P(|X/c_0^{1/r}| > n^{1/r}) \leq E\left(\left|\frac{X}{c_0^{1/r}}\right|^r\right) < +\infty. \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. ■

Hệ quả 1. Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập đôi một và bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X với $E(|X|^r) < +\infty, 0 < r < 2$. Khi đó, ta có:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} P\left(\left|\sum_{k=1}^n (X_k - E(X_k I\{|X_k| \leq n^{1/r}\}))\right| > n^{1/r} \varepsilon\right)$$

hội tụ với mọi $\varepsilon > 0$.

Đặc biệt, nếu dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ có phân phối đối xứng thì với mọi $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} P\left(\left|\sum_{k=1}^n X_k\right| > n^{1/r} \varepsilon\right) < \infty.$$

Định lý 3. Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X với $E(|X|^r) < +\infty, 0 < r < 1$. Giả sử $\{a_n, n \geq 1\}$ và $\{b_n, n \geq 1\}$ là dãy

các số thực dương, $\{b_n, n \geq 1\}$ là dãy tăng và thỏa điều kiện:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty, \sum_{k=1}^n a_k^r = O(b_n) \text{ và } \sum_{k=1}^n a_k = o(b_n^{1/r}).$$

Đặt $S_n = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$.

Khi đó,

$$\frac{1}{b_n^{1/r}} S_n \xrightarrow{P} 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Chứng minh:

Cho $M > 0$, với $k \geq 1$ đặt

$$Y_k = X_k I\{|X_k| \leq M\}, Z_k = X_k I\{|X_k| > M\}.$$

Theo bất đẳng thức C_r ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_n} E|S_n|^r &= \frac{1}{b_n} E \left| \sum_{k=1}^n a_k Y_k + \sum_{k=1}^n a_k Z_k \right|^r \\ &\leq \frac{1}{b_n} E \left| \sum_{k=1}^n a_k Y_k \right|^r + \frac{1}{b_n} E \left| \sum_{k=1}^n a_k Z_k \right|^r \\ &\leq \frac{M^r}{b_n} \left| \sum_{k=1}^n a_k \right|^r + \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k^r E|Z_k|^r \\ &\leq M^r \left| \frac{1}{b_n^{1/r}} \sum_{k=1}^n a_k \right|^r + \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k^r E(|X_k|^r I\{|X_k| > M\}) \\ &\leq M^r \left| \frac{1}{b_n^{1/r}} \sum_{k=1}^n a_k \right|^r + \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k^r E(|X|^r I\{|X| > M\}) \\ &\leq M^r \left| \frac{1}{b_n^{1/r}} \sum_{k=1}^n a_k \right|^r + CE(|X|^r I\{|X| > M\}). \end{aligned}$$

Từ điều kiện định lý suy ra:

$$\limsup_n \frac{1}{b_n} E|S_n|^r \leq CE(|X|^r I\{|X| > M\}).$$

Vì $E(|X|^r) < +\infty$ nên khi cho $M \rightarrow +\infty$, ta được:

$$\limsup_n \frac{1}{b_n} E|S_n|^r = 0.$$

Do đó,

$$\frac{1}{b_n^{1/r}} S_n \xrightarrow{P} 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Định lý được chứng minh. ■

Hệ quả 2. Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X với $E(|X|^r) < +\infty, 0 < r < 1$. Khi đó,

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{P} 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Định lý 4. Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập đôi một và bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X với $E(|X|^2) < +\infty$. Giả sử $\{a_n, n \geq 1\}$ và $\{b_n, n \geq 1\}$ là dãy các số thực dương, $\{b_n, n \geq 1\}$ là dãy tăng và thỏa điều kiện:

$$\frac{b_{2n}}{b_n} = O(1), \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty,$$

$$\sum_{i=1}^n a_n^2 = O(b_n) \text{ và } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{nb_n} < +\infty.$$

Khi đó,

$$\frac{S_n - ES_n}{b_n} \rightarrow 0 \text{ (h.c.c)}$$

khi $n \rightarrow +\infty$, trong đó $S_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$.

Chứng minh:

Theo Bổ đề 1, ta có:

$$\begin{aligned} E \left(\max_{1 \leq j \leq n} |S_j - ES_j|^2 \right) &= E \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=1}^j a_i (X_i - EX_i) \right|^2 \right) \\ &\leq \left(\frac{\ln 4n}{\ln 2} \right)^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 E |X_i - EX_i|^2 \\ &\leq \left(\frac{\ln 4n}{\ln 2} \right)^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 E |X_i|^2 \\ &\leq \left(\frac{\ln 4n}{\ln 2} \right)^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 E |X|^2 = E |X|^2 \left(\frac{\ln 4n}{\ln 2} \right)^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 \\ &\leq C b_n (\ln n)^2 E(|X|^2). \end{aligned}$$

Mặt khác, với mọi $\varepsilon > 0$ theo bất đẳng thức Markov ta lại có:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} P \left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i - ES_i| > \varepsilon b_n \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nb_n^2 \varepsilon^2} E \left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i - ES_i|^2 \right) \\ &\leq \frac{CE(|X|^2)}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{nb_n} < +\infty. \end{aligned}$$

Do đó, theo Bổ đề 2 ta có

$$\frac{S_n - ES_n}{b_n} \rightarrow 0 \text{ (h.c.c)}.$$

Định lý được chứng minh. ■

Hệ quả 3. Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập đôi một và bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X với $E(|X|^2) < +\infty$. Khi đó,

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \rightarrow 0 \text{ (h.c.c)}$$

khi $n \rightarrow +\infty$, trong đó $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

3. Kết luận

Bài báo trình bày kết quả nghiên cứu về việc mở rộng các luật số lớn trong các định lý giới hạn cổ điển cho dãy biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối sang dãy các biến ngẫu nhiên có mối quan hệ phức tạp hơn. Cụ thể, Định lý 1 và Định lý 3 mở rộng luật yếu số lớn dạng Marcinkiewicz-Zygmund cho dãy các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một và bị chặn ngẫu nhiên, trong khi Định lý 2 đánh giá tốc độ hội tụ. Ngoài ra, Định lý 4 đưa ra một điều kiện đủ cho luật mạnh số lớn của dãy biến ngẫu nhiên này. Tất cả các kết quả về luật số lớn đều được phát biểu cho dãy tổng có trọng số của các biến ngẫu nhiên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] M. Loève, *Probability Theory II*, 4th ed. New York, NY, USA: Springer, 1977.
- [2] A. Gut, *Probability: A Graduate Course*, 2nd ed. Springer, 2013.
- [3] S. H. Sung, "Marcinkiewicz-Zygmund type strong law of large numbers for pairwise i.i.d. random variables", *J. Theor. Probab.*, 2012, doi: 10.1007/s10959-012-0417-4.
- [4] F. Boukhari, "The Marcinkiewicz-Zygmund strong law of large numbers for dependent random variables", *Statistics & Probability Letters*, vol. 161, 2020, doi: 10.1016/j.spl.2020.108727.
- [5] L. V. Dung, T. Ngamkham, N. D. Tien, and A. I. Volodin, "Marcinkiewicz-Zygmund type law of large numbers for double arrays of random elements in Banach spaces", *Lobachevskii J. Math.*, vol. 30, pp. 337-346, 2009, doi: 10.1134/S1995080209040118.